数学Ⅲ　ヤマシート　Ｎｏ．６－１　<微分の導入。**「微分係数」**と**「導関数」**の定義式を思い出せ。**「微分可能」**と**「連続」**も大切！>　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

<到達目標>　自分の習得状況を定期的にチェックせよ。

- □ 1　微分係数、導関数の定義を述べることができる
- □ 2　定義に従って、微分係数や導関数を求めることができる
- □ 3　関数 $f(x)$ が $x=▲$ で微分可能ならば、$x=▲$ で連続であることを証明できる
- □ 4　関数 $f(x)$ が $x=▲$ で連続であっても、$x=▲$ で微分可能とならない例を挙げ、それを証明できる
- □ 5　定義に従って、$\sin x$ と $\cos x$ の導関数を求めることができる

<**「微分係数」**の定義式を思い出しましょう。数Ⅱでやりましたね。

「$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(▲+h)-f(▲)}{h}$」（← これは、$\frac{0}{0}$ の不定形です。）

が、ある値に収束するならば、$f(x)$ は**「$x=▲$ で微分可能」**といいます。 そして、

この極限値を、関数 $y=f(x)$ の「$x=▲$ における**微分係数**」といって、$f'(▲)$ と表す。つまり、

「$\displaystyle f'(▲)=\lim_{h\to 0}\frac{f(▲+h)-f(▲)}{h}$」

と書けるんでしたね。

さらに微分係数 $f'(▲)$ は、$y=f(x)$ 上の点 $(▲,\ f(▲))$ における**「接線の傾き」**でした！！>

$\boxed{1}$　次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ のとき，微分係数 $f'(1)$ を定義に従って求めよ。

(2)　$g(x)=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ のとき，微分係数 $g'(2)$ を定義に従って求めよ。

<関数 $f(x)$ を**微分する**とは、**導関数** $f'(x)$ **を求める**ということでした。

「導関数」の定義式も数Ⅱと同じです。しっかり思い出してね。

「$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$」（← これは、$\frac{0}{0}$ の不定形です。）

が、ある x の関数に収束するならば、これを関数 $f(x)$ の「導関数」といって、$f'(x)$ と表す。

つまり、

「$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$」

と書けるんでしたね。>

$\boxed{2}$　次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

(2)　$g(x)=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$

<一般的に、**「微分可能ならば連続である」**ことは成り立ちますが、果たしてその逆は成り立つのでしょうか？　つまり、連続ならば（絶対に）微分可能なのでしょうか？

ここで、「微分可能な状態とは何か」を考えてみましょう。関数 $f(x)$ が、$x=▲$ で微分可能な状態とは、極限値「$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(▲+h)-f(▲)}{h}$」が存在するということ。さらに、極限値が存在するということは、右極限と左極限が一致するということ。すなわち、

「$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(▲+h)-f(▲)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{f(▲+h)-f(▲)}{h}=\alpha$」……(∗)

が成り立つということです。よって、連続な関数でも、$x=▲$ において (∗) が成り立たないことがあるならば、その関数は $x=▲$ において微分可能ではない、つまり逆は成り立たないということです。少し難しいですか？　でも、具体例を１つ覚えておくと理解が深まりますよ！>

$\boxed{3}$　次の問いに答えよ。

(1)　命題：「関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能ならば，$f(x)$ は $x=a$ において連続である。」の真偽を述べよ。ただし，真ならば必ず証明を行い，偽ならばその反例を示せ。

(2)　命題：「関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能ならば，$f(x)$ は $x=a$ において連続である。」の逆を述べ，その真偽を述べよ。ただし，真ならば必ず証明を行い，偽ならばその反例を示せ。

＜$\sin x$、$\cos x$ の導関数を定義に従って求める。加法定理と三角関数の極限を使おう！

以前、大阪大で出題されたぞ！＞

$\boxed{4}$ 次の関数の導関数を定義に従って求めよ。→ 教科書Ｐ１５２ を参照

(1) $f(x)=\sin x$

(2) $f(x)=\cos x$

解答

$\boxed{1}$ (1) $f'(1)=-1$ (2) $g'(2)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\boxed{2}$ (1) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ (2) $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{3}$ (1) 真，証明略 (2) 偽，反例：$f(x)=|x|$，証明略

$\boxed{4}$ (1) $f'(x)=\cos x$ (2) $f'(x)=-\sin x$